Universität Potsdam
Bernhard Stankewitz
Statistik für Bio- und Ernährungswissenschaftler
Winter 2024/25

Übungsblatt 7

Achtung: Teilaufgaben, die mit einem Stern * versehen sind werden nicht korrigiert und gehen auch nicht in die Punkte für die Nebenleistung ein. Sie dienen nur als Klausurvorbereitung und/oder als weiteres Übungsmaterial.

Aufgabe 1 (50P)**.** Doping spielt eine große Rolle bei den olympischen Spielen. Wir gehen davon aus, dass 20% aller Athleten „Dopingsünder“sind. Allerdings müssen wir davon ausgehen, dass im Verlauf der Spiele die Wahrscheinlichkeit bei einem Test „Dopingalarm “auszulösen für einen Dopingsünder nur 0.8 beträgt. Allerdings wird auch bei ehrlichen Sportlern mit Wahrscheinlichkeit 0.15 „Dopingalarm“ausgelöst.

(a) Stellen Sie diese Situation in einem Baumdiagramm übersichtlich dar.

(b) Überlegen Sie nun welche absoluten Häufigkeiten zu erwarten sind, wenn das Verfahren auf genau 2700 Sportler angewendet wird. Füllen Sie dazu die folgende Tabelle aus.

		Dopingalarm		Summe
		Ja	Nein	
Doping-suender	Ja			
	Nein			
Summe				2700

(c) Nehmen Sie an, einer der 2700 Sportler wird zufällig ausgewählt. Wie groß sind dann die folgenden Wahrscheinlichkeiten?

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Dopingalarm ausgelöst wird.
2. Die Wahrscheinlichkeit, dafür, dass der Sportler durch die Kontrolle nicht korrekt eingestuft wird.

3. Die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Sportler kein Dopinsünder ist, obwohl Dopingalarm ausgelöst wurde.

(d) Nehmen Sie an, einer der 2700 Sportler wird zufällig ausgewählt. Sind die Ereignisse {Sportler ist Dopinsünder} und {Sportler löst Dopingalarm aus} unabhängig?

Aufgabe 2 (25P). Wir betrachten eine vereinfachte Variante eines Roulettespiels mit einem Rad, das die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ enthält:

Jede Zahl hat eine Farbe: Rot oder Schwarz. Die 0 hat die Farbe Grün. Zwei unterschiedliche Wetten sind erlaubt:

1. Farbwette: Wir setzen eine Geldmenge x entweder auf Rot oder auf Schwarz (Grün ist nicht erlaubt). Treffen wir die Farbe, die vom Rouletterad angezeigt wird erhalten wir $2x$ zurück. Andernfalls verlieren wir die Geldmenge x an das Kasino.

2. Zahlwette: Wir setzen eine Geldmenge x auf eine Zahl zwischen $1, \ldots, 36$ (0 ist nicht erlaubt). Treffen wir die Zahl, die vom Rouletterad angezeigt wird erhalten wir $36x$. Andernfalls verlieren wir die Geldmenge x an das Kasino.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Auszahlung beider Wetten für einen variablen Einsatz x. Welche Wette ist lukrativer.

(b) Berechnen Sie die Varianzen der Auszahlungen beider Wetten für einen variablen Einsatz x . Bei welcher Wette vermuten Sie, dass man schneller sein Geld verlieren kann.

(c) Warum gewinnt das Kasino immmer auf lange Frist?

Aufgabe 3 (25P). Wir betrachten ein Investitionsspiel basierend auf einem 10-fachen Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.6$. Jede Runde können wir einen Teil x eines Startkapitals von 10 einsetzen. Bei Erfolg erhalten wir $2x$ zurück. Bei Misserfolg verlieren wir x.

(a) Schreiben Sie eine Funktion in **R**, die dieses Spiel darstellt. Nutzen Sie dafür eine `for`-Schleife, die das aktuelle Kapital updatet, den Münzwurf simuliert und basierend auf einer Nutzereingabe den Gewinn berechnet. Durch eine Konsolenausgabe soll die Funktion dem Spieler jede Runde das aktuelle Kapital K angeben, in der wievielten Runde man sich befindet und den Spieler nach dem Einsatz $x \in [0, K]$ fragen, mit dem diese Runde gespielt werden soll. Am Ende des Spiels soll die Funktion das übrige Gesamtkapital ausgeben.

(b) (*) Was ist der Erwartungswert der Strategie in der ersten Runde $x = 10$ zu setzen und dann aufzuhören, d.h. alle anderen Einsätze sind $x = 0$? Was ist die Varianz dieser Strategie?

(c) (*) Was ist der Erwartungswert der Strategie in jeder der 10 Runden $x = 1$ zu setzen? Was ist die Varianz dieser Strategie?

(d) (*) Geben Sie eine Strategie an, die einen Erwartungswert besitzt der größer ist als $10 \cdot p = 6$.

(e) (*) Versuchen Sie durch Ausprobieren Ihren Gewinn in dem Investitionsspiel zu maximieren. Beschreiben Sie mit welcher Strategie Sie am erfolgreichsten waren.

Aufgabe 4 (*)**.**

(a) (*) Erklären Sie den Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeitsdichte einer diskreten Zufallsvariable X und dem Histogramm wiederholter unabhängiger Ziehungen der Variable.

(b) (*) Rechnen sie nach, dass der Erwartungswert linear ist, vgl. Vorlesung.

(c) (*) Warum ist die Unabhägigkeit zweier diskreter Zufallsvariablen gleichbedeutend damit, dass ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichten das Produkt der Einzeldichten ist?

(d) Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von der Zufallsvariablen $(X - \mathbb{E}(X))/\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

(e) (*) Betrachten Sie erneut den einfachen 6-seitigen Würfelwurf. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Augenzahl. Bestimmen Sie auch das 25%-Quantil und den Median.

(f) (*) Betrachten Sie erneut den zweifachen Würfelwurf. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Augensumme. Bestimmen Sie auch das 25%-Quantil und den Median.